Separación Ciega de Fuentes:
Caso indeterminado

Luis Vielva[1]

Ainhoa Subinas, Eva Navas, Inmaculada Hernáez[2],

Pau Bofill[3]

Ingeniería de Comunicaciones, Universidad de Cantabria[1]

Electrónica y Telecomunicación, Universidad del País Vasco[2]

Arquitectura de Computadores, Universidad Politécnica de Cataluña[3]

Esquema de la presentación

- Planteamiento del problema general.
- Separación ciega de fuentes.
  - Tantas medidas como fuentes.
  - Caso indeterminado.
    - Interpretación geométrica.
    - Estimación de la matriz de mezclas.
    - Criterios de inversión.
    - Resultados obtenidos.
- Conclusiones y líneas futuras.

Planteamiento del problema general

$$\xrightarrow{\quad\mathbf{x}\quad} \boxed{f(\cdot)} \xrightarrow{\quad\mathbf{b}\quad}$$

- n fuentes desconocidas: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- atraviesan un sistema desconocido: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
- Si se dispone de m medidas: $\mathbf{b} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$,

Planteamiento del problema general

$$\xrightarrow{\mathbf{x}} \boxed{f(\cdot)} \xrightarrow{\mathbf{b}}$$

- n fuentes desconocidas: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- atraviesan un sistema desconocido: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
- Si se dispone de m medidas: $\mathbf{b} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$,
- ¿cómo recuperar las fuentes?

Planteamiento del problema general

$$\xrightarrow{\mathbf{x}} \boxed{f(\cdot)} \xrightarrow{\mathbf{b}} \boxed{f^{-1}(\cdot)} \xrightarrow{\hat{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x}}$$

- n fuentes desconocidas: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- atraviesan un sistema desconocido: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
- Si se dispone de m medidas: $\mathbf{b} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$,
- ¿cómo recuperar las fuentes?
- Si existe el sistema inverso, $\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{b})$;

Planteamiento del problema general

$$\xrightarrow{\mathbf{x}} \boxed{f(\cdot)} \xrightarrow{\mathbf{b}} \boxed{f^{-1}(\cdot)} \xrightarrow{\hat{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x}}$$

- n fuentes desconocidas: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- atraviesan un sistema desconocido: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
- Si se dispone de m medidas: $\mathbf{b} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$,
- ¿cómo recuperar las fuentes?
- Si existe el sistema inverso, $\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{b})$;
- si no, $\hat{\mathbf{x}} = g(\mathbf{b})$.

Planteamiento del problema general

$$\xrightarrow{\mathbf{x}} \boxed{f(\cdot)} \xrightarrow{\mathbf{b}} \boxed{f^{-1}(\cdot)} \xrightarrow{\hat{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x}}$$

- n fuentes desconocidas: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- atraviesan un sistema desconocido: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
- Si se dispone de m medidas: $\mathbf{b} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$,
- ¿cómo recuperar las fuentes?
- Si existe el sistema inverso, $\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{b})$;
- si no, $\hat{\mathbf{x}} = g(\mathbf{b})$.
- Deconvolución, bss, modelos con retraso, ...

Separación ciega de fuentes

- Mezcla lineal instantánea sin ruido.
- Modelo: $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- n fuentes se combinan linealmente en m medidas.
- Separación **ciega**: no se conoce $\mathbf{A}$.

Separación ciega de fuentes

- Mezcla lineal instantánea sin ruido.
- Modelo: $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- n fuentes se combinan linealmente en m medidas.
- Separación **ciega**: no se conoce $\mathbf{A}$.
- Solución:

Separación ciega de fuentes

- Mezcla lineal instantánea sin ruido.
- Modelo: $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- n fuentes se combinan linealmente en m medidas.
- Separación **ciega**: no se conoce $\mathbf{A}$.
- Solución:
  - Estimación de la matriz de mezclas $\mathbf{A}$.

Separación ciega de fuentes

- Mezcla lineal instantánea sin ruido.
- Modelo: $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- n fuentes se combinan linealmente en m medidas.
- Separación **ciega**: no se conoce $\mathbf{A}$.
- Solución:
  - Estimación de la matriz de mezclas $\mathbf{A}$.
  - Si $m = n$, $\mathbf{A}$ es cuadrada y $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Separación ciega de fuentes

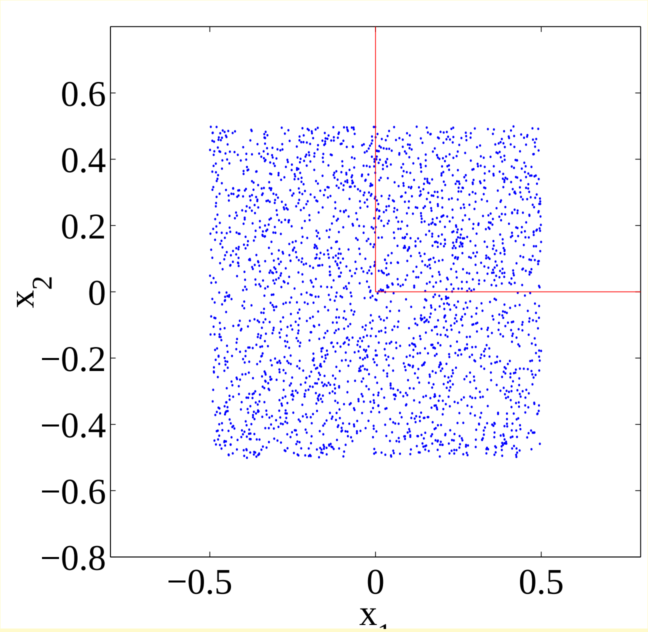
- Mezcla lineal instantánea sin ruido.
- Modelo: $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- n fuentes se combinan linealmente en m medidas.
- Separación **ciega**: no se conoce $\mathbf{A}$.
- Solución:
  - Estimación de la matriz de mezclas $\mathbf{A}$.
  - Si $m = n$, $\mathbf{A}$ es cuadrada y $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
  - Si $m > n$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$. Pseudo inversa $||\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}||$.

Separación ciega de fuentes

- Mezcla lineal instantánea sin ruido.
- Modelo: $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- n fuentes se combinan linealmente en m medidas.
- Separación **ciega**: no se conoce $\mathbf{A}$.
- Solución:
  - Estimación de la matriz de mezclas $\mathbf{A}$.
  - Si $m = n$, $\mathbf{A}$ es cuadrada y $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
  - Si $m > n$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$. Pseudo inversa $||\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}||$.
  - Si $m < n$, indeterminado, ¿qué podemos hacer?

Tantas medidas como fuentes

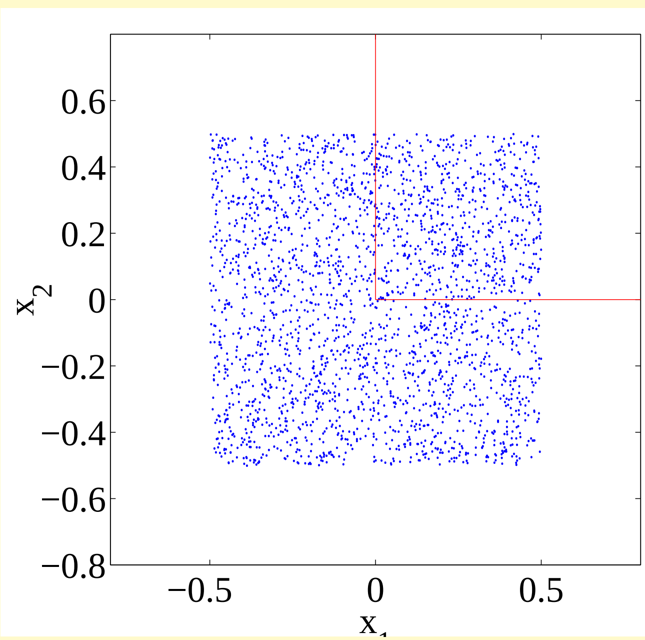
- $m = n = 2$.
- $\mathbf{x}$: dos distribuciones uniformes independientes.



Tantas medidas como fuentes

- $m = n = 2$.
- $\mathbf{x}$: dos distribuciones uniformes independientes.

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

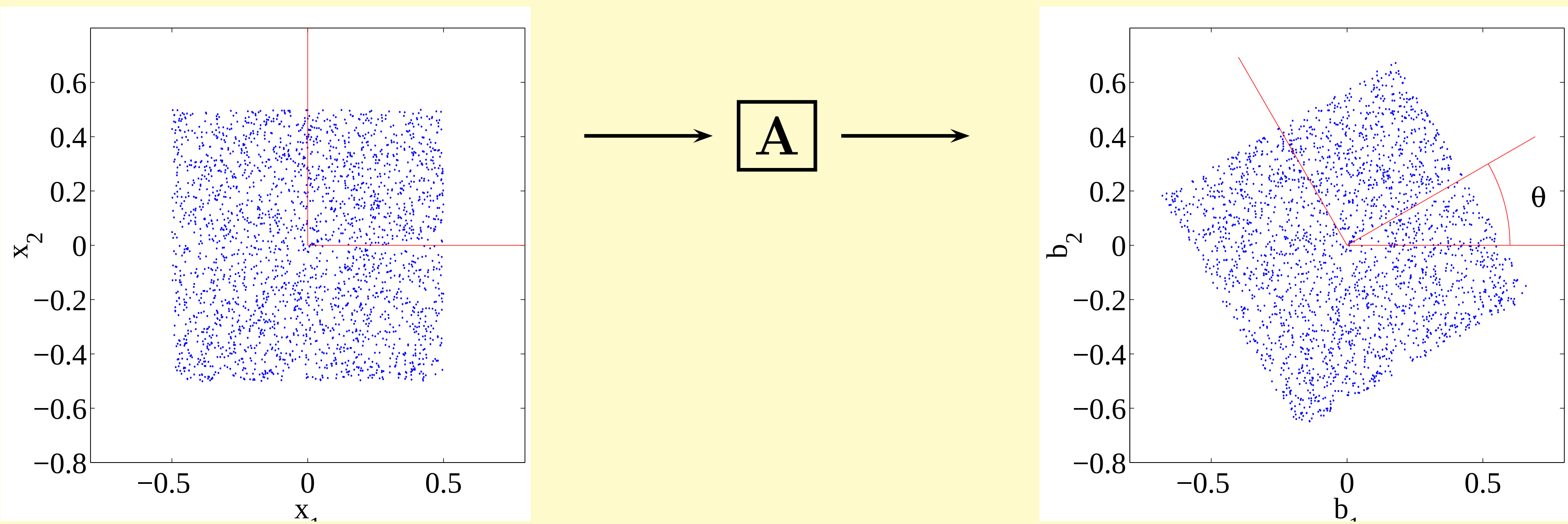


$$\longrightarrow \boxed{\mathbf{A}} \longrightarrow$$

Tantas medidas como fuentes

- $m = n = 2$.
- $\mathbf{x}$: dos distribuciones uniformes independientes.

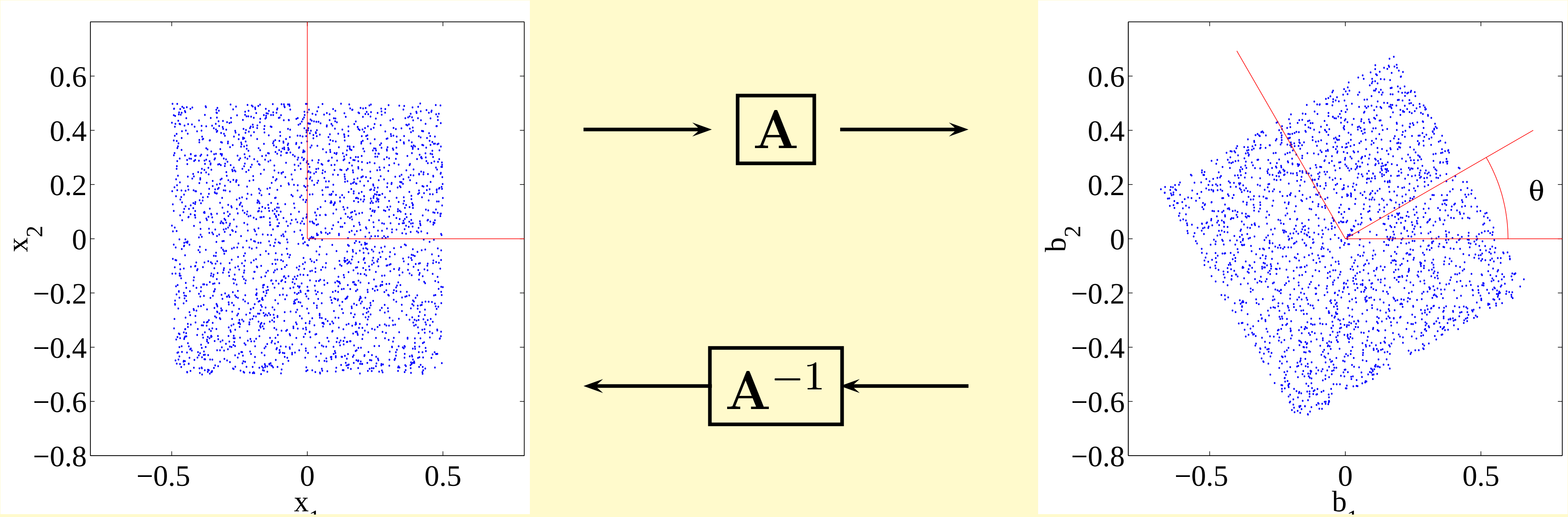
$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Tantas medidas como fuentes

- $m = n = 2$.
- $\mathbf{x}$: dos distribuciones uniformes independientes.

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Caso indeterminado

- Menos medidas que fuentes: $m < n$.

Caso indeterminado

- Menos medidas que fuentes: $m < n$.
- Infinitas soluciones: no es suficiente con conocer $\mathbf{A}$.

Caso indeterminado

- Menos medidas que fuentes: $m < n$.
- Infinitas soluciones: no es suficiente con conocer $\mathbf{A}$.
- Pseudo inversa: solución con norma L_2 mínima.

Caso indeterminado

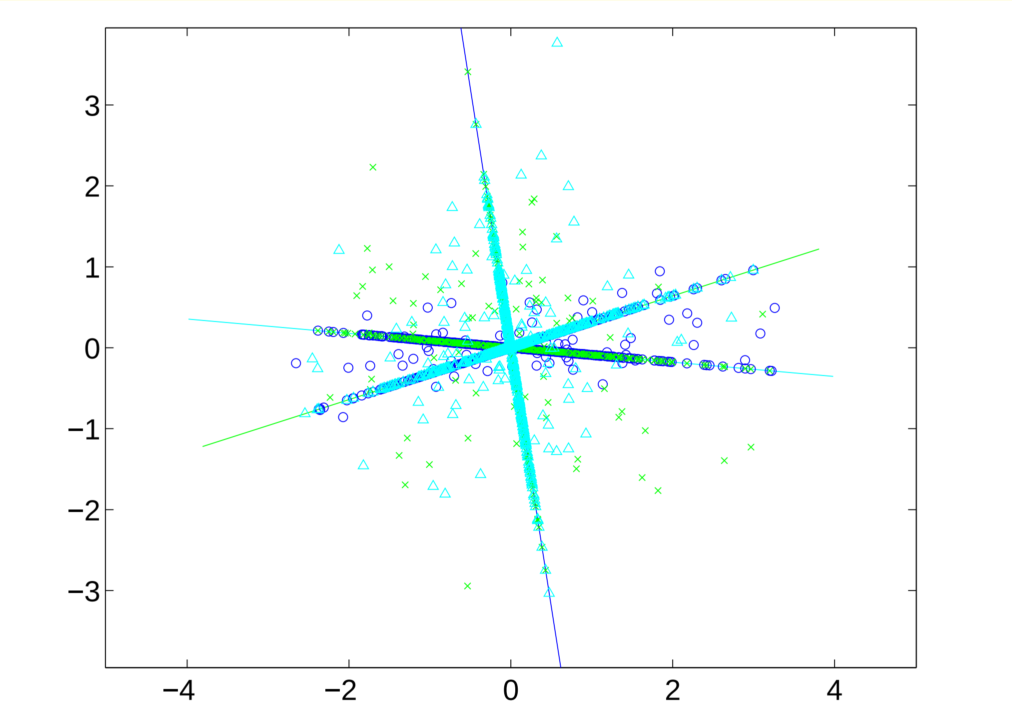
- Menos medidas que fuentes: $m < n$.
- Infinitas soluciones: no es suficiente con conocer $\mathbf{A}$.
- Pseudo inversa: solución con norma L_2 mínima.
- Otros criterios de selección de solución.
  - Heurísticos
  - Geométricos
  - Analíticos

Interpretación geométrica

- $n = 3$ fuentes y $m = 2$ medidas.
- Si $\mathbf{a}_j$ es la columna j-ésima de $\mathbf{A}$,

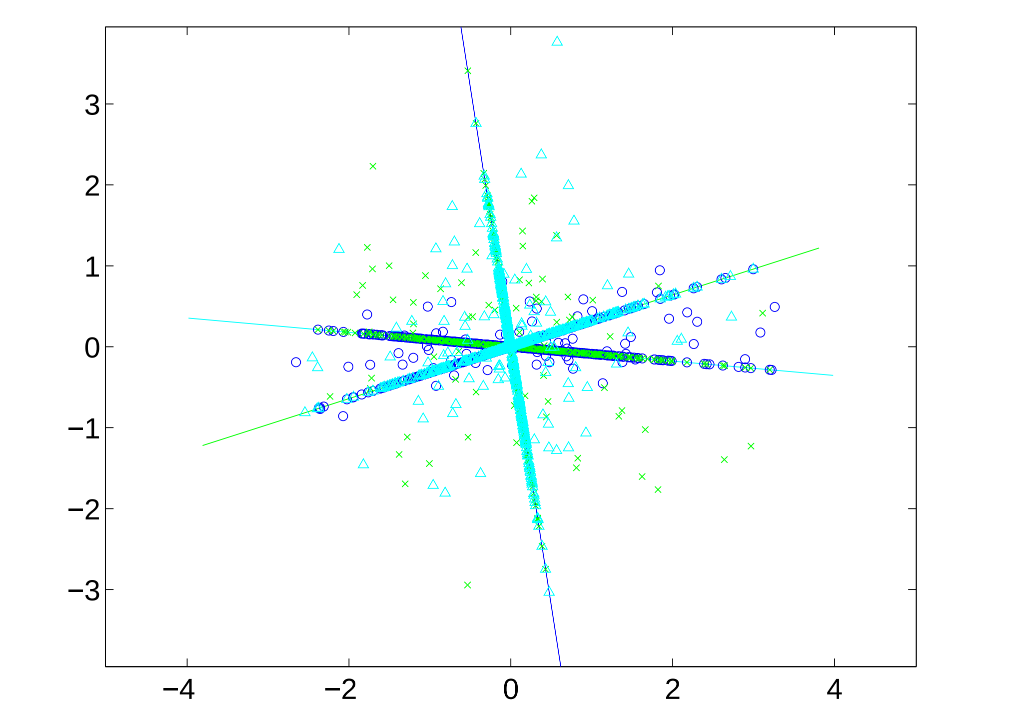
Interpretación geométrica

- $n = 3$ fuentes y $m = 2$ medidas.
- Si $\mathbf{a}_j$ es la columna j-ésima de $\mathbf{A}$,



Interpretación geométrica

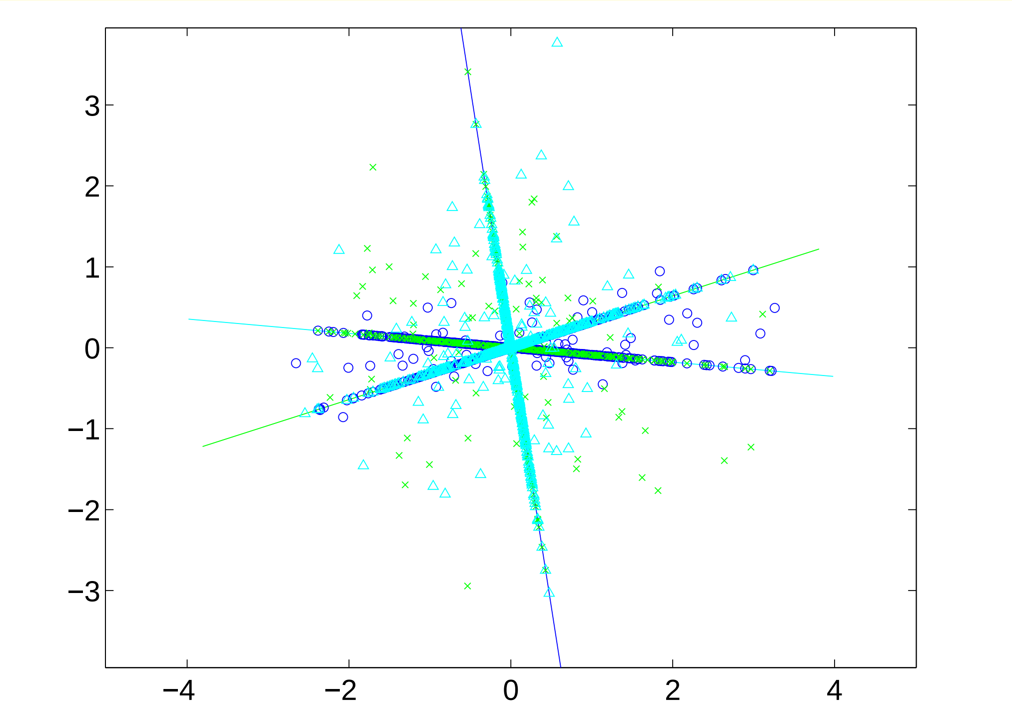
- $n = 3$ fuentes y $m = 2$ medidas.
- Si $\mathbf{a}_j$ es la columna j-ésima de $\mathbf{A}$,



- $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a_3}$.

Interpretación geométrica

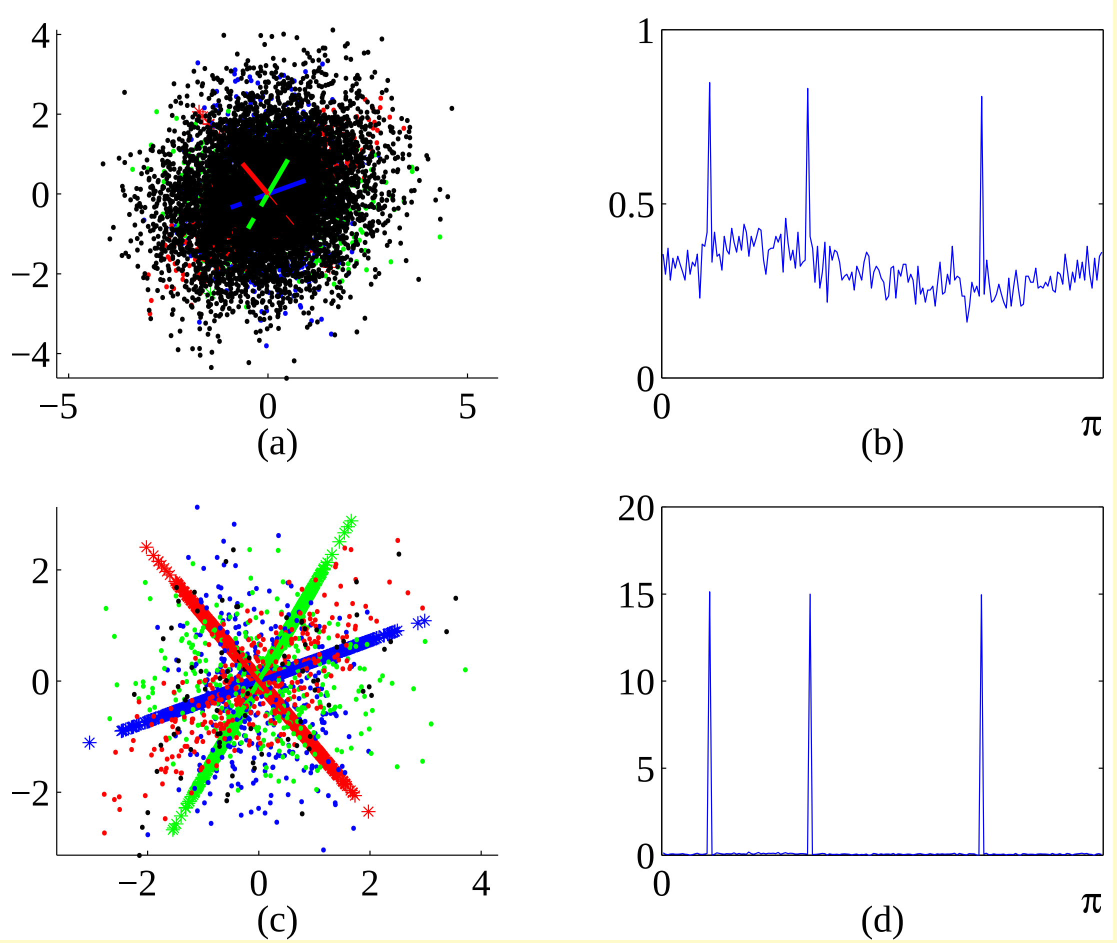
- $n = 3$ fuentes y $m = 2$ medidas.
- Si $\mathbf{a}_j$ es la columna j-ésima de $\mathbf{A}$,



- $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a_3}.$
- Fuentes poco densas.

Estimación de la matriz de mezclas

- Factores de densidad 0.8 y 0.1.

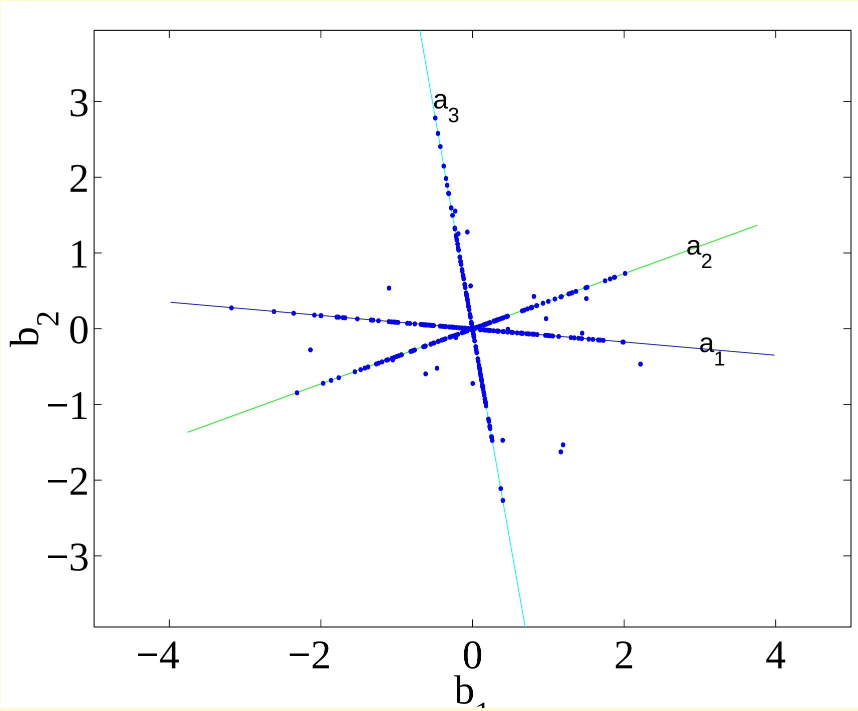


Criterios de inversión

- $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a_3}$.

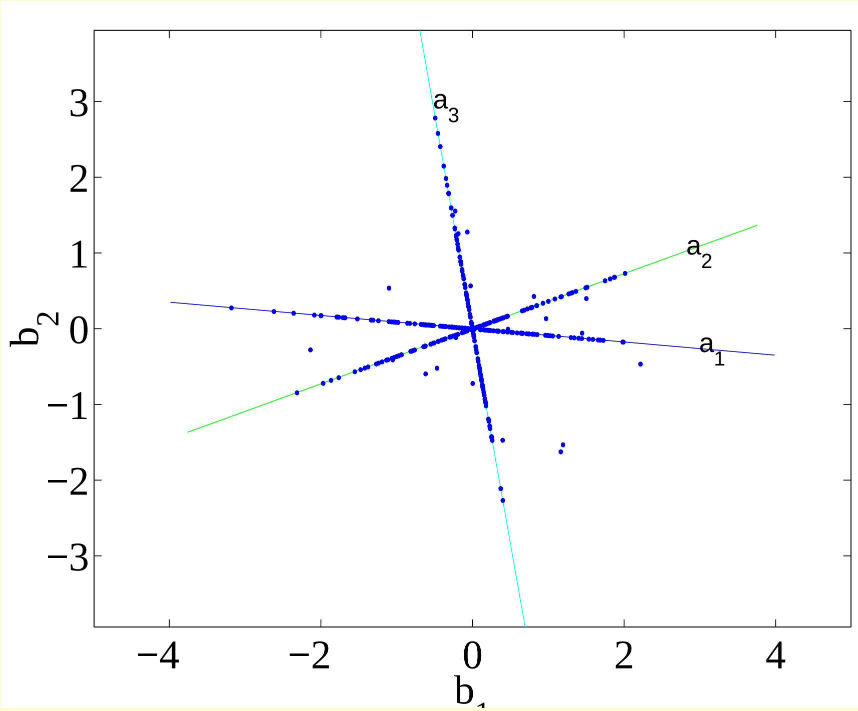
Criterios de inversión

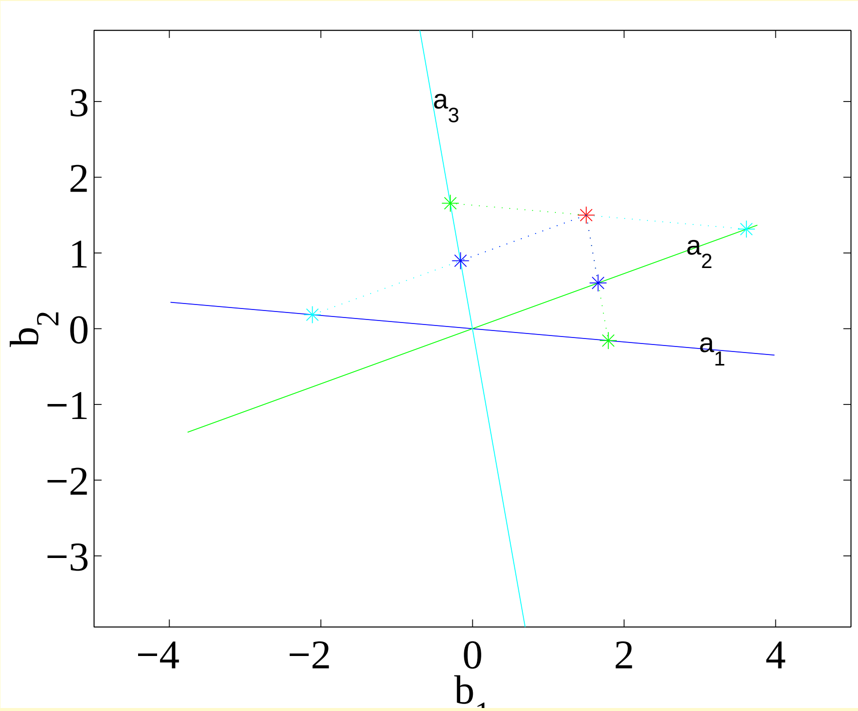
- $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a_3}.$



Criterios de inversión

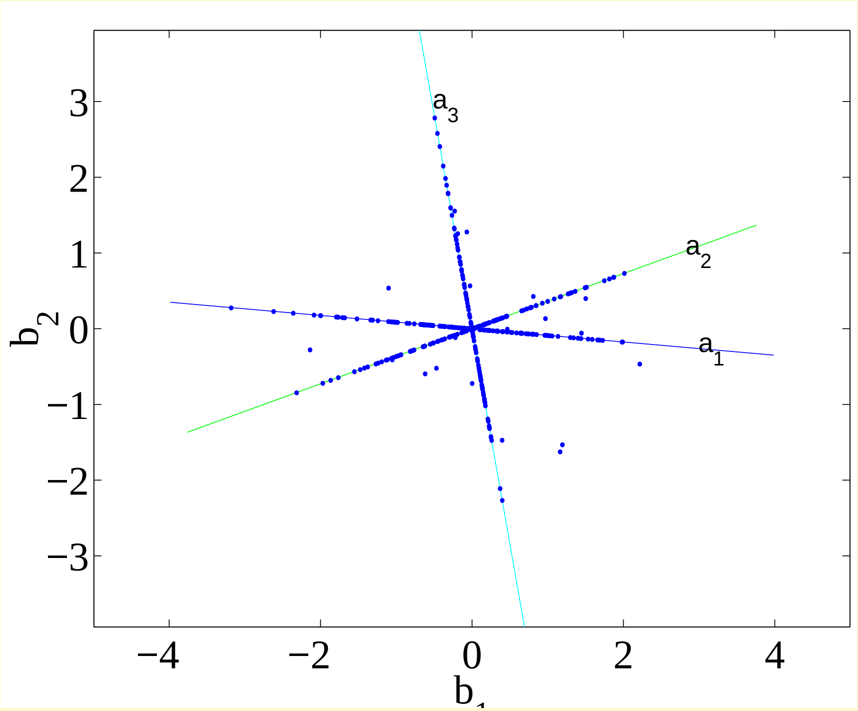
- $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3.$

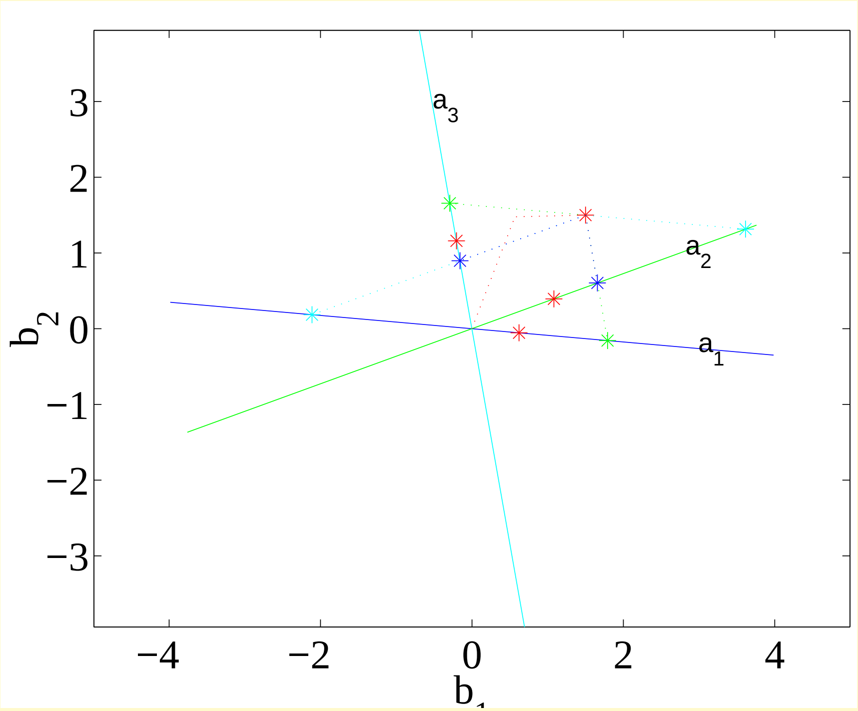




Criterios de inversión

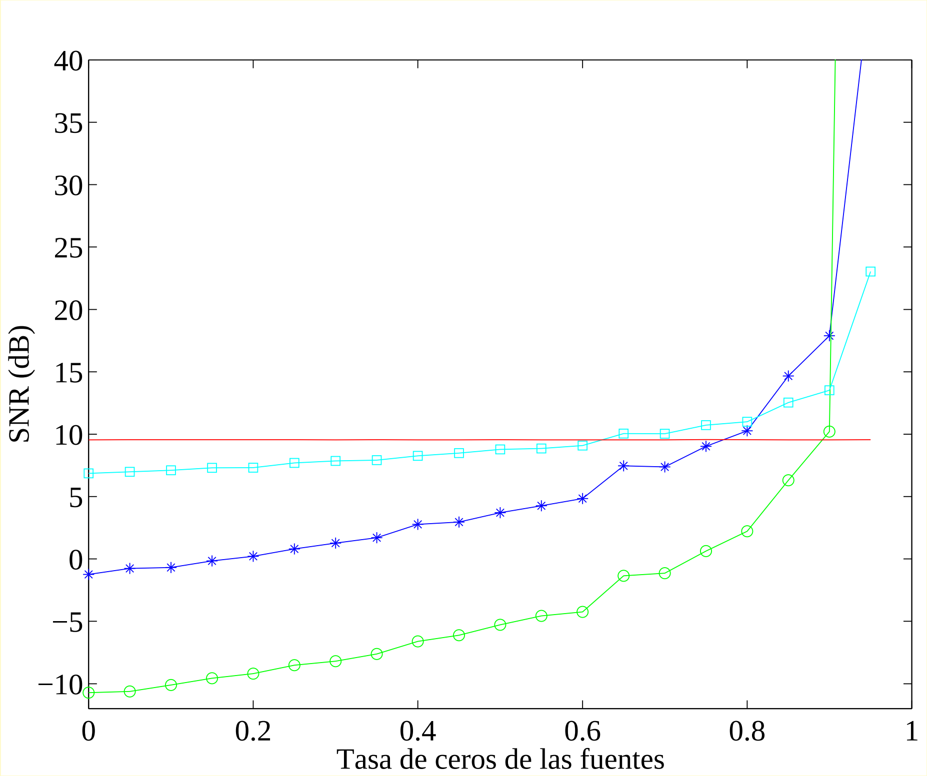
- $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a_3}.$





Resultados obtenidos

- Pseudo inversa.
- Criterios 1D, m-D, y m-D L_2



Conclusiones y líneas futuras

- Tres fases para separar fuentes cuando $m < n$:

Conclusiones y líneas futuras

- Tres fases para separar fuentes cuando $m < n$:
  - Representación en un dominio apropiado.
  - Estimación de la matriz de mezclas.
  - Criterio de selección de la solución.

Conclusiones y líneas futuras

- Tres fases para separar fuentes cuando $m < n$:
  - Representación en un dominio apropiado.
  - Estimación de la matriz de mezclas.
  - Criterio de selección de la solución.
- Buenos resultados:
  - Función de la densidad de las señales.
  - Representación en dominios poco densos.